数理解析研究所講究録
624巻 1987年 157-169

Ribbon 2-knotの分解について

神戸大学（教育） 安田 智之

任意の自然数nに対し$\mathbb{K}_n$をn-knot type $[K^n \subset S^{n+2}]$全体の集合とする。$n \neq 2$ なる任意の元$[K^n \subset S^{n+2}]$に対し、K^nをprime decomposition $[K^n \subset S^{n+2}] = [K_1^n \subset S^{n+2}] \# \cdots\cdots \# [K_n^n \subset S^{n+2}]$と分解するとし、特に$n=1$の時 decompositionがuniqueであること、がわかっている。（[S, P.347]）

$n=2$についても同様の問題が考えられるが、まだ未解決である。ここには少なくとも二つの困難がある。まず2-knotについては、二つのunknotでないknotのcompositionがunknotでないとは言い切れない。従ってdecompositionが有限回の操作でおわるかどうかがわからない。また2-knot K^2について、$\pi_1(K^2) = \mathbb{Z}$であってもK^2がunknotとは限らない。依ってprimenessの判定が難しい。

ここでは2-knotを考える上で対象をribbon 2-knotに限定し、本来のdecomposition（[So, P.140]）よりきつい条件で定

義した$\boxplus$ − decompositionなる概念を導入し、分解問題を考える。

<u>定義1</u>　$\mu \geq 1$に対しμ-component のtrivial 2-link ($O_1^2 \cup \cdots \cup O_\mu^2 \subset S^4$) から適当なembeddings $B_1^+, \cdots, B_{\mu-1}^+ : I \times D^2 \longrightarrow S^4$ に沿ったfusionによって得られる2-knotを<u>ribbon 2-knot</u> という。(D^2は2-disk)

Ribbon 2-knotに対しては次の様な特徴づけが知られている。

<u>定理2</u>（[Y1, P.453]）　K^2がribbon 2-knot である為の必要十分条件は、K^2のあるSeifert 3-manifold W^3が存在して、W^3が次の①或いは②の条件を満たす事である。

① $W^3 \cong D^3$　(D^3は3-disk)

② $W^3 \cong S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# \cdots \# S^2 \times S^1 - \mathring{\Delta}^3$ (Δ^3は3-simplex) で、かつW^3はtrivial system of 2-spheres をもつ。

ここにW^3が<u>trivial system of 2-spheres</u> をもつ、とはW^3の中の互いにdisjointな2-spheresのcollection $\{S_1^2, S_2^2, \cdots \cdots, S_{2r-1}^2, S_{2r}^2\}$があって次の(1)～(3)を満たす事を言う。

(1)　$S_1^2 \cup S_2^2 \cup \cdots \cup S_{2r-1}^2 \cup S_{2r}^2$は$S^4$のtrivial 2-link

(2)　$S_i^2 \cup S_{i+r}^2$はW^3で$N_i \cong S^2 \times I$をboundし，$N_i \cap N_j = \phi$ $(i \neq j)$

(3)　$Cl(W^3 - N_1 - \cdots - N_r) \cong S^3 -$ (2r+1コのopen 3-disks)

従って以下の一連の概念がきっちり定義される。

定義3　Ribbon 2-knot K^2の ribbon genus $g(K^2)$ を次で定義する。K^2の Seifert manifold をW^3とする時W^3を可能な限りはりかえた時の rank $H_1(W^3)$ の最小値をK^2の ribbon genus と定める。また$g(K^2)$を attain するW^3をK^2の minimal Seifert manifold という。

定義4　Ribbon 2-knot K^2の $\boxplus$-decomposition を次で定義する。K^2に対しある$(S^3 \subset S^4)$とあるK^2の minimal Seifert manifold $(W^3 \subset S^4)$とがあって次の①,②,③を満たすとする。

① $S^3 \cap K^2 = k$はS^3で unknotted

② $S^3 \cap W^3 = d^2$は 2-disk

③ $d^2 \cap$ (W^3の trivial system of 2-spheres) $= \emptyset$

この時、$K^2 - d^2 = K_1^{2\prime} \cup K_2^{2\prime}$ $(K_1^{2\prime} \cap K_2^{2\prime} = \emptyset)$, $K_1^2 = K_1^{2\prime} \cup d^2$, $K_2^2 = K_2^{2\prime} \cup d^2$とおく。$K_1^2$と$K_2^2$が各々 trivial knot でないならば

$$(K^2 \subset S^4) = (K_1^2 \subset S^4) \boxplus (K_2^2 \subset S^4)$$

とあらわし、K^2は2つの 2-knot K_1^2, K_2^2 に$\boxplus$-decomposition されると言う。またK_1^2とK_2^2をK^2の $\boxplus$-factor と呼ぶ。そしてこの様に$\boxplus$-factor に分解できない ribbon 2-knot は $\boxplus$-prime であるという。

依って次の二つの命題を示す事により分解問題を考える事が

できる様になる。

<u>命題5</u>　Ribbon 2-knot K^2 の $\oplus$-factors K_1^2, K_2^2 はまた ribbon 2-knot である。

《証明》 $W^3 \cong \overset{n}{\underset{i=1}{\#}}(S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ とする。定義4の①,②より $W^3 = W_1^3 \underset{d}{\cup} W_2^3$ と書け，(i) $W_1^3 \cong \underset{j}{\#}(S^2 \times S^1)_j - \mathring{\Delta}_1^3$, $\partial W_1^3 = K_1^2 \cong \partial \Delta_1^3$,

(ii) $W_2^3 \cong \underset{k}{\#}(S^2 \times S^1)_k - \mathring{\Delta}_2^3$, $\partial W_2^3 = K_2^2 \cong \partial \Delta_2^3$ ，となる。

ここで $j = 1, 2, \cdots, l$, $k = l+1, l+2, \cdots, n$ としてよい。更に定義4の③から W_1^3, W_2^3 は各々(i), (ii)に対応する 2-sphere の trivial system をもつ。（命題5証了）

<u>命題6</u>　$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ とすると $g(K^2) = g(K_1^2) + g(K_2^2)$ が成立する。

《証明》 K^2 の minimal Seifert manifold を $W^3 = W_1^3 \underset{d}{\cup} W_2^3$ とおく。この時，

$$g(K^2) = \min_{W^3} \operatorname{rank} H_1(W^3)$$
$$= \operatorname{rank} H_1(W_1^3) + \operatorname{rank} H_1(W_2^3)$$
$$\geq g(K_1^2) + g(K_2^2)$$
$$= \operatorname{rank} H_1(W_1^{3*}) + \operatorname{rank} H_1(W_2^{3*})$$

（W_i^{3*} は K_i^2 の genus を attain する Seifert 3-manifold）

$$= \operatorname{rank} H_1(W_1^{3*} \cup W_2^{3*})$$
$$\geq g(K^2)$$

（$\because W_1^{3*} \cup W_2^{3*}$ は K^2 の一つの Seifert 3-manifold）（命題6証了）

<u>系7</u>　$g(K^2)=1$ の時

<u>系8</u>　各2-knot について⊕-factor 数は有限である。

ところで分解問題を考える前に次の命題を示す。

<u>命題9</u>　任意の非負整数nに対し、ribbon genus n の ribbon 2-knot が存在する。

この命題を証明する為に以下準備を行なう。

<u>注意10</u>　任意の自然数nに対しAlexander polynomial としてn次式を持つ様なribbon 2-knot K^2 で $g(K^2)=n$ なるものを見つける。そうすれば次の補題11により命題9は証明された事になる。

<u>補題11</u>　Ribbon genus g の ribbon 2-knot K^2 に対して次の不等式が成立する。

$$(\Delta_{K^2}(t) \text{ の degree}) \leq g$$

補題11は下の定理12, 13, 14から直ちに示される。

[Y1, P.458] より、ribbon 2-knot K^2 の standard representative として$\mathbb{R}^3_0$に対して対称なものをとれる。以後、ribbon 2-knot の standard representative としていつもこれを考え、その equatorial cross section $K^2 \cap \mathbb{R}^3_0$ をK^2の<u>equatorial 1-knot</u>と言う。

<u>定理12</u> [Y2, P.100] Ribbon genus g の ribbon 2-knot K^2には genus g 以下の equatorial 1-knot k^1 が存在する。

<u>定理13</u> [Ro, P.208] 1-knot kに対して $g(k)=g$ とすると、次の不等式が成立する。 $\deg \Delta_k(t) \leq 2g$

<u>定理14</u> [Yo, P.35] (1) 任意の ribbon 2-knotは principal first elementary ideal をもつ。(2) ribbon 2-knot ($K^2 \subset \mathbb{R}^4$) の equatorial cross section を ($k \subset \mathbb{R}^3_0$) とする時、次の式が成立する。"$\doteq$" は mod $\pm t^\lambda$ で両辺が等しい事を示す。

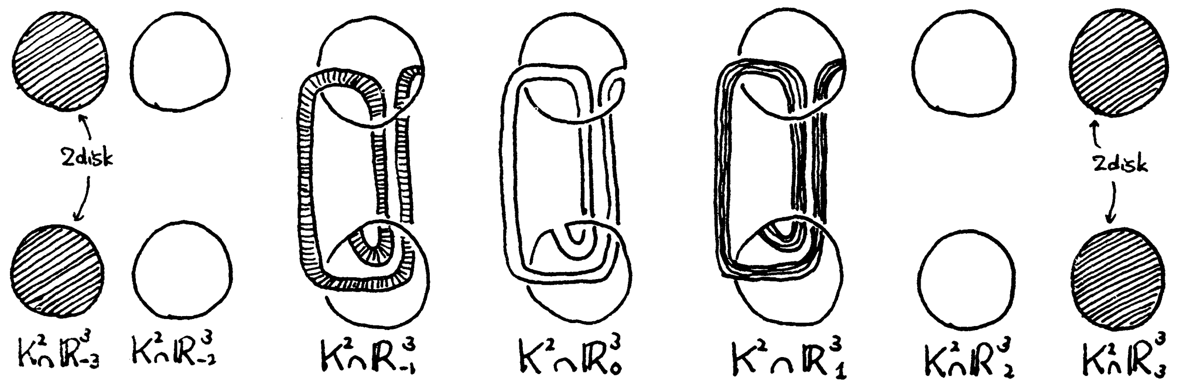
$$\Delta_k(t) \doteq \Delta_{K^2}(t) \times \Delta_{K^2}(t^{-1})$$

(補題11証了)

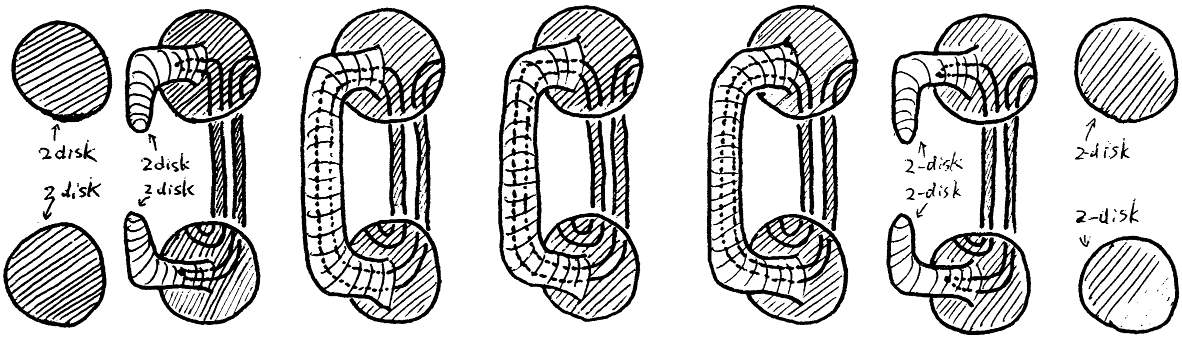
《命題9の証明》

($n=0$の場合) unknotted な ribbon 2-knot O^2は 3-disk を bound するので ribbon genus の定義により $g(O^2)=0$である。

($n=1$の場合) 次の ribbon 2-knot K^2を考える。



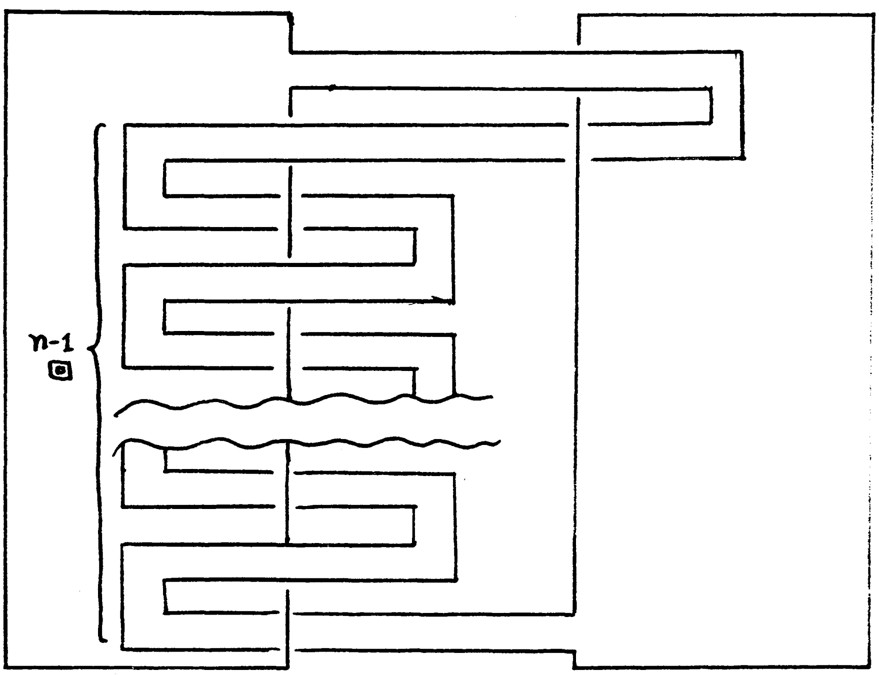
$\Delta_{K^2}(t) = 2t-1$ である。一方 K^2 には次の様な Seifert 3-manifold $S^2 \times S^1 - \mathring{\Delta}^3 \cong W^3$ をはる事が出来る。



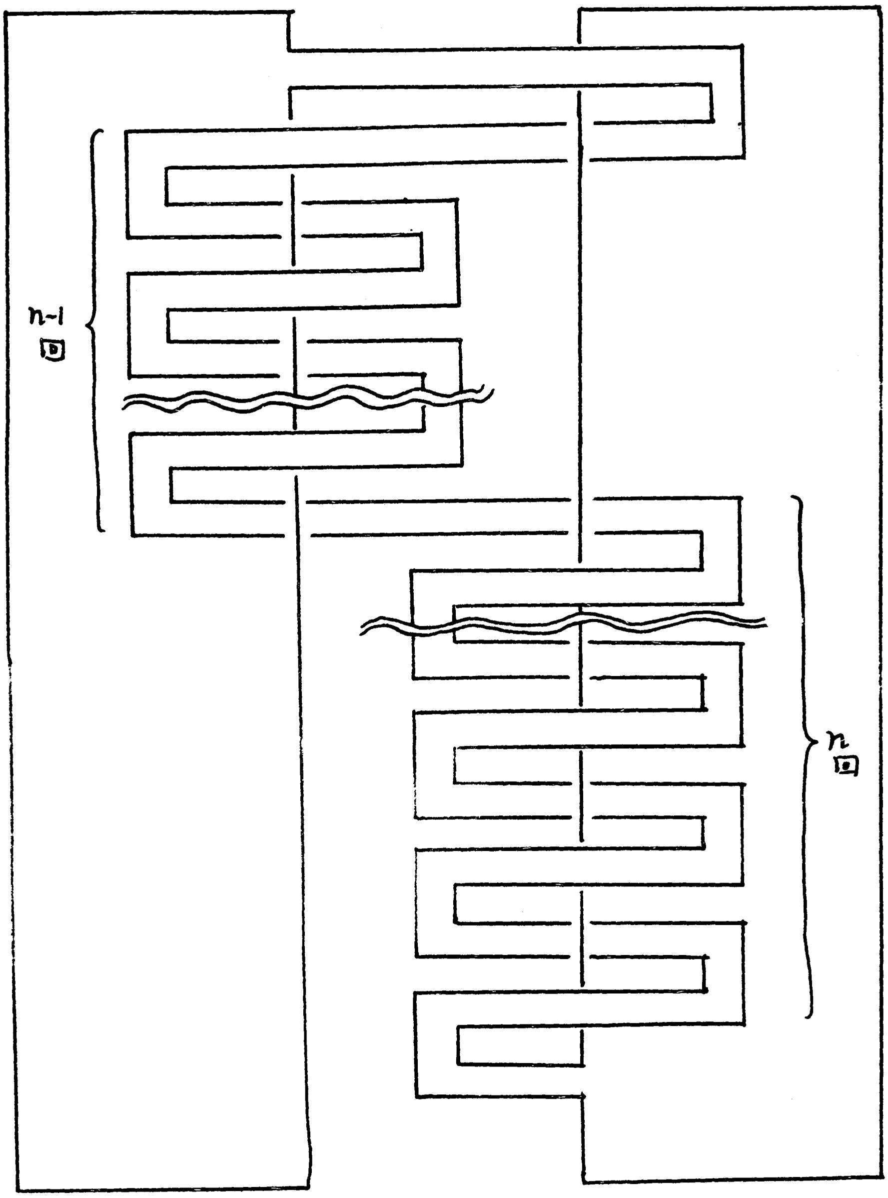
$W^3 \cap \mathbb{R}^3_{-3}$ $W^3 \cap \mathbb{R}^3_{-2}$ $W^3 \cap \mathbb{R}^3_{-1}$ $W^3 \cap \mathbb{R}^3_{0}$ $W^3 \cap \mathbb{R}^3_{1}$ $W^3 \cap \mathbb{R}^3_{2}$ $W^3 \cap \mathbb{R}^3_{3}$

従って注意10より K^2 は ribbon genus 1 の ribbon 2-knot である。

（$n \geq 2$ の場合）equatorial 1-knot を指定する。あとは、$n = 1$ の例と同様に自然に各 cross section を与えて 2-knot を構成するものとする。



この ribbon 2-knot K^2 の Alexander polynomial は. Kinoshita ([K, P.520]) に従えば $t^n - t + 1$ である。下に図示した様に K^2 には Seifert 3-manifold $\overset{n}{\underset{i=1}{\#}} (S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ をはる事が出来る。従って注意10より $g(K^2) = n$ である。まず K^2 を knot type を変えないように変形した上で Seifert manifold W^3 をはる。$W^3 \cap R^3_0$ のみ示す。

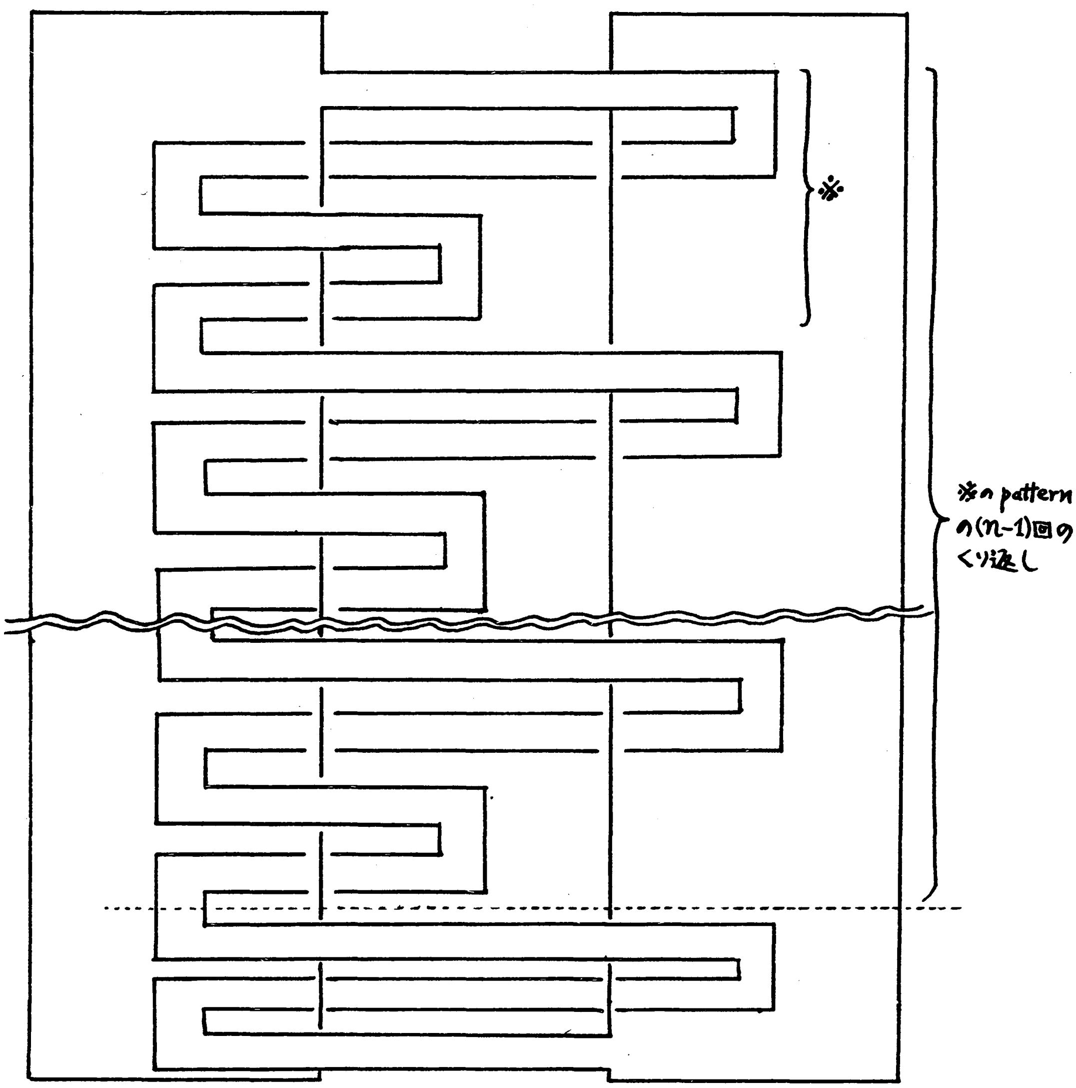


(命題9証了)

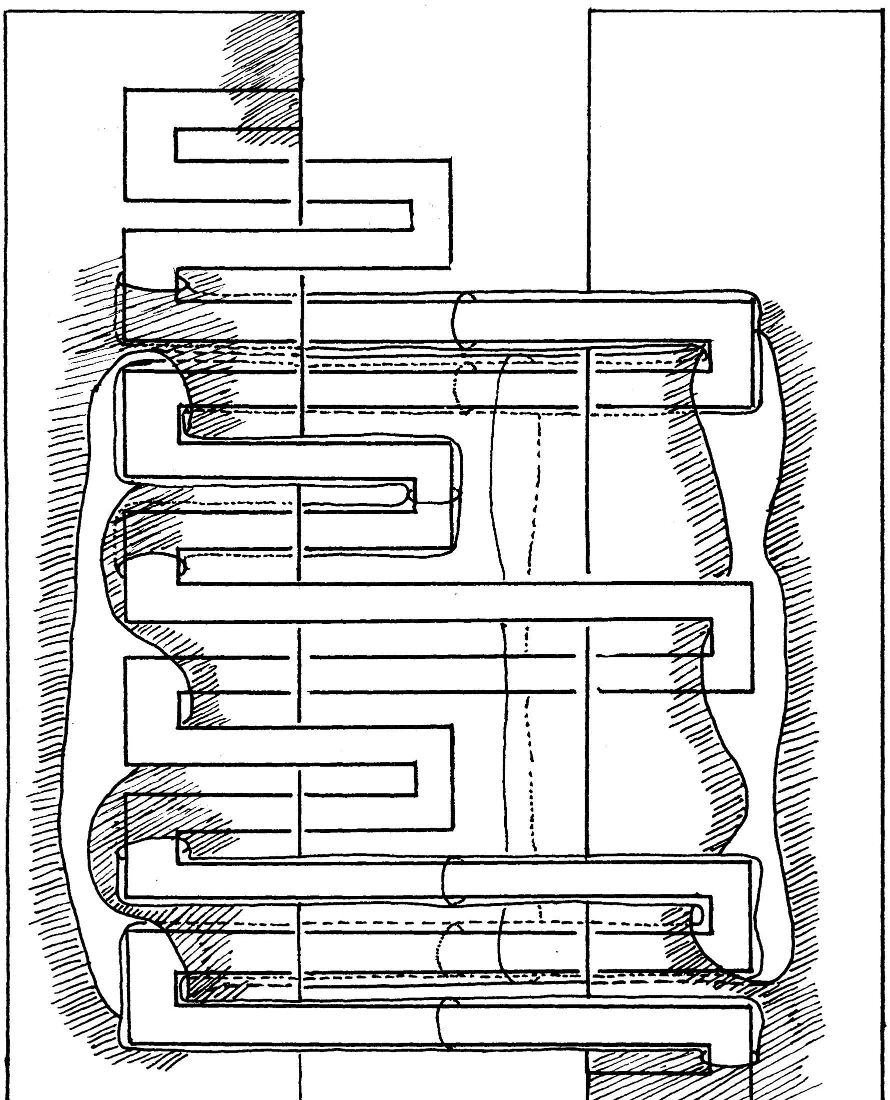
注意15 研究集会では上の（$n \geq 2$の場合）で構成した ribbon 2-knot がすべてのnについておそらく⊞-prime であろうと述べたが、$t^n - t + 1$は$n = 8$のとき

$(t^2 - t + 1)(t^6 + t^5 - t^3 - t^2 + 1)$ と因数分解され、

⊞-prime でない可能性の出る事がのちにわかった。しかしながらその後$n \geq 1$なるnに対し Alexander polynomial として整数係数の範囲で既約な多項式をもち、しかも Seifert manifold $\overset{n}{\underset{i=1}{\#}} (S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ をもつ ribbon 2-knot が構成できた。



この 1-knot を equatorial 1-knot として.《命題 9 の証明》の方法で自然に構成した ribbon 2-knot は $t^{n}-2$ なる Alexander polynomial をもつ。これに Seifert 3-manifold $W^3 \cong \#_{i=1}^{n} (S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ をはったときの $W^3 \cap R^3_0$ を示せばよいが、はり方の pattern は同じなので $n=3$ の図を掲げる。



以上により命題9はもっと強められ、「任意の自然数nに対して ribbon genus n の$\oplus$-prime ribbon 2-knot が存在する」と改める事ができる。

最後に ribbon genus n ($n \geq 0$) の ribbon 2-knot について各分解問題を考える。

《$g(K^2)=0$ のとき》定義よりK^2は unknot であり、$\oplus$-prime である。

《$g(K^2)=1$ のとき》K^2は系7より$\oplus$-prime である。

$g(K^2)=1$ なるK^2については次の定理がある。

<u>定理16</u> [Y2, P.100] Alexander polynomial で knot type がきまる。(但し unoriented knot として)

次の事は、[C-F, chapter 8] の Alexander polynomial の定義の仕方と、$\oplus$-decomposition の定義からすぐ出る。

<u>命題17</u>　$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ ならば $\Delta_{K^2}(t) \doteq \Delta_{K^2}(t) \times \Delta_{K^2}(t^{-1})$

《$g(K^2)=2$ のとき》 命題17より$\Delta_{K^2}(t)$が一次以下なら、K^2は$\oplus$-prime である。次に$\Delta_{K^2}(t)$ が二次式とする。

$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ とすると命題6より $g(K_1^2) = g(K_2^2) = 1$ である。

従って補題11と命題17から$\Delta_{K_1^2}(t)$と$\Delta_{K_2^2}(t)$は各々一次式である。依って因数分解の一意性と定理16から次のことが言える。

命題18　$g(K^2)=2$なるK^2は$\oplus$-decompositionに関し、分解がunique である。

同様に定理16と因数分解の一意性より次の事は言える。

命題19　$g(K^2)=n$　$(n \geq 3)$ なるK^2に対し、これがn個の2-knotに分解されるとする。加えて$\Delta_{K^2}(t)$が、一次式の積に因数分解されるとする。この時、$\oplus$-decompositionに関し、分解はunique である。

命題20　$g(K^2)=3$ で$\Delta_{K^2}(t)=1$ ならばK^2は$\oplus$-primeである。

＊参考文献＊

[S]　Shin'ichi Suzuki : Knotting Problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., vol 4 No. 3 (1976) 241-371

[So] Sosinskii A.B. : Decomposition of knots, Math. USSR Sbornik 10 (1970)

[Y1] Takaaki Yanagawa : On ribbon 2-knots, the 3-manifold bounded by the 2-knots, Osaka J. Math. vol 6 (1969) 447-464

[Y2] Takaaki Yanagawa : A note on ribbon n-knots with genus 1, Kobe J. Math, vol 2 (1985) 99-102

[Ro] D. Rolfsen : Knots and Links, Publish or Perish Inc., Barkley 1976

[K] Shin'ichi Kinoshita : On the Alexander polynomials of 2-sphers in a 4-sphere, Ann. of Math. vol 74 (1961) 518-531

[Yo] Katsutoshi Yonebayashi : On the Alexander polynomial of ribbon 2-knots, Master's thesis Kobe Univ. 1969

[C-F] R.H. Crowell and R.H. Fox : Introduction to knot theory, Grad. Texts in Math. vol 57 Springer-Verlag New York and Berlin 1977